

Pérdida de Controlabilidad u Observabilidad de Sistemas LTI en Lazo Cerrado.

A. Domínguez-Sánchez, C. Elizondo-González, E. Alcorta-García

Programa Doctoral en Ingeniería Eléctrica, FIME, UANL.

Av. Pedro de Alba S/N Cd. Universitaria

San Nicolás de los Garza, N.L., C.P.66451, México.

varo27@live.com.mx; celizond@yahoo.com; ealcorta@ieee.org

G. Romero-Galván

Departamento de Electrónica, UAT, Unidad Académica Reynosa-Rodhe, gromero@uat.mx

Resumen—En el presente trabajo se analiza la relación que existe entre la función de transferencia de un sistema de lazo abierto y de lazo cerrado con respecto a sus propiedades de controlabilidad y observabilidad. Se presentan dos lemas relacionados con la cancelación de polos con ceros en la función de transferencia de un sistema. En este trabajo también se analizan las propiedades de controlabilidad y observabilidad para la retroalimentación de estado, ya que es conocido que la retroalimentación de estado es invariante a la controlabilidad y no lo es para la observabilidad.

Palabras clave: controlabilidad, observabilidad, coincidencia de polos y ceros.

I. INTRODUCCIÓN

En los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) existen casos en los que el sistema de lazo cerrado es robustamente estable a los parámetros del proceso y controlador sin embargo para ciertos valores de estos parámetros el sistema puede perder controlabilidad, observabilidad o ambos. En este trabajo se analiza la relación que existe entre la función de transferencia de un sistema de lazo abierto y de lazo cerrado con respecto a sus propiedades de controlabilidad y observabilidad. Cuando un sistema se encuentra en su realización mínima no existe posibilidad de cancelar polos con ceros en su función de transferencia además de que el sistema es controlable y observable, sin embargo cuando el sistema no se encuentra en su realización mínima existe coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia y el sistema es no controlable o no observable. Este es un tema estudiado por algunos investigadores, por ejemplo:

En (Butman, S. y Sivan, R., 1964) se determina que una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea controlable y observable es que no existan cancelaciones de polos y ceros en su función de transferencia.

En (Anderson y Gevers, 1981) se estudia la relación entre la cancelación de polos y ceros con la estabilidad del sistema, estableciendo un conjunto de condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas lineales multivariados retroalimentados, además también se analiza la cancelación de polos con ceros estables e inestables.

En (E. Emre, 1982) se estudia la relación que existe entre las cancelaciones de polos y ceros del sistema en lazo abierto con las cancelaciones de polos y ceros del sistema en lazo cerrado en términos de descripciones polinomiales, el análisis se realiza para sistemas multivariados con retroalimentación dinámica en configuración de compensador cascada.

En (Robert N. Clark, 1988) se recomienda evitar la cancelación de polos y ceros al utilizar un sistema de retroalimentación por compensación serie, el comportamiento del sistema es lineal para señales pequeñas y es no lineal para señales grandes, además también se indica que el comportamiento lineal del sistema es afectado por ruido y por la cancelación no exacta de polos y ceros.

En (Stephen Kahne, 1990) se analiza la cancelación de polos y ceros en sistemas retroalimentados de una entrada y una salida en relación con lo que llaman modos escondidos, donde las propiedades de controlabilidad y observabilidad pueden determinar la presencia de modos escondidos, además de que los modos son escondidos de la excitación de entrada pero no pueden ser escondidos de la excitación por condiciones iniciales, en esta publicación también se recomienda evitar la cancelación de polos con ceros inestables.

En (S. Atadan, 1991) se determina que la cancelación de polos con ceros en una función de transferencia corresponde con la reducción de variables de estado.

En (Stefan F. Graebe y Richard H. Middleton, 1995) se realiza un análisis de comparación entre cancelar o desplazar los polos de una planta estable, enfatizando que la dinámica cancelada aparece en la función sensibilidad de perturbaciones a la entrada.

En el presente trabajo se analizan las condiciones en las que se presenta coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia de un sistema con lo cual el sistema es no controlable o no observable. Esto es importante debido a que algunas veces los parámetros del controlador logran estabilidad en el sistema inclusive logrando características de desempeño deseadas, sin embargo resulta que dichos valores producen una pérdida de controlabilidad

u observabilidad de tal manera que solo el estudio o diseño de la estabilidad es insuficiente. También se estudian las propiedades de controlabilidad y observabilidad en un sistema con retroalimentación de estado.

II. COINCIDENCIA DE POLOS CON CEROS

Al existir coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia, el sistema resulta no controlable o no observable. A continuación se muestran las condiciones en las que el sistema de lazo cerrado puede presentar coincidencia de polos con ceros, comenzando por analizar al sistema con un controlador proporcional y después con un controlador dinámico. El análisis se realiza para un sistema con retroalimentación unitaria como el que se muestra en la figura (1), donde $G_P(s)$ es la función de transferencia de la planta definida como $G_P(s) = N(s)/D(s)$.

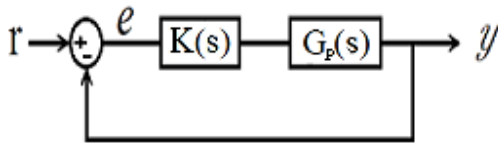


Figura 1. Sistema en lazo cerrado con retroalimentación unitaria.

La función de transferencia del sistema de lazo cerrado se muestra en la siguiente ecuación:

$$G_{LC}(s) = \frac{K(s)G_P(s)}{1 + K(s)G_P(s)} = \frac{K(s)N(s)}{D(s) + K(s)N(s)}, \quad (1)$$

donde $N(s)$, $D(s)$ son polinomios de grado m y n respectivamente.

$$N(s) = (s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m), \quad (2)$$

$$D(s) = (s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n). \quad (3)$$

Además cuando $K(s)$ es un control proporcional K_P , la ecuación (1) se puede escribir como:

$$G_{LC}(s) = \frac{K_P(s + z_1) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1) \cdots (s + p_n) + K_P(s + z_1) \cdots (s + z_m)}.$$

De la ecuación anterior se puede observar que puede existir coincidencia de polos con ceros en el lazo cerrado si y solo si existe un polo p_j igual a un cero z_i y por lo tanto usando un controlador proporcional K_P existe coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia de lazo cerrado $G_{LC}(s)$ si y sólo si existe coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia del sistema de lazo abierto $G_P(s)$, lo cual se expresa en el lema 1.

Lema 1: Dada una planta con función de transferencia $G_P(s) = N(s)/D(s)$, un controlador proporcional K_P en su entrada y con retroalimentación unitaria. Entonces el lazo cerrado tiene cancelación de polos y ceros sí y solo sí el lazo abierto tiene cancelación de polos y ceros.

Demostración: Primero se obtiene la función de transferencia del lazo cerrado.

$$G_{LC}(s) = \frac{K_P N(s)}{D(s) + K_P N(s)}. \quad (4)$$

Necesidad. Supongamos que la función de transferencia del lazo cerrado tiene cancelación de polos y ceros, eso significa que el numerador y denominador de la función de transferencia de lazo cerrado tienen un factor común que podríamos llamar $f(s)$. Entonces dicha función se puede expresar como:

$$G_{LC}(s) = \frac{K_P N^*(s)f(s)}{D^*(s)f(s) + K_P N^*(s)f(s)}, \quad (5)$$

así que $N(s) = N^*(s)f(s)$ y $D(s) = D^*(s)f(s)$, entonces la función de transferencia de la planta es:

$$G_P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N^*(s)f(s)}{D^*(s)f(s)}, \quad (6)$$

y ésta también tiene cancelación de polos y ceros.

Suficiencia. Supongamos que la función de transferencia de la planta tiene cancelación de polos y ceros, entonces

$$G_P(s) = \frac{N^*(s)f(s)}{D^*(s)f(s)}, \quad (7)$$

por lo tanto $N(s) = N^*(s)f(s)$ y $D(s) = D^*(s)f(s)$. Sustituyendo éstos en la función de transferencia del lazo cerrado se obtiene:

$$G_{LC}(s) = \frac{K_P N^*(s)f(s)}{D^*(s)f(s) + K_P N^*(s)f(s)}, \quad (8)$$

de tal manera que la función de transferencia del lazo cerrado tiene cancelación de polos y ceros. ■

La ganancia K_P mueve los polos hacia los ceros pero no puede lograr que los polos se cancelen con los ceros y por lo tanto el control proporcional es invariante a la controlabilidad y a la observabilidad, sin embargo no sucede así cuando el controlador es dinámico ya que podría existir coincidencia de polos y ceros en la función de transferencia de lazo cerrado como se muestra en el siguiente lema.

Lema 2: Dado un controlador $K(s)$ y una planta $G_P(s)$

$$K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}, \quad (9)$$

$$G_P(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (10)$$

Ambos sin cancelación de polos con ceros. El controlador está conectado a la entrada de la planta y el control se hace con retroalimentación unitaria de la salida. Entonces la función de transferencia en lazo cerrado $G_{LC}(s)$ presenta coincidencia de polos con ceros si y sólo si $K(s)G_P(s)$ presenta coincidencia de polos con ceros.

Demostración:

Necesidad. Supóngase que la función de transferencia en lazo cerrado $G_{LC}(s)$ presenta coincidencia de polos con ceros, entonces de acuerdo a la ecuación (11) se puede ver que las posibilidades de coincidencia de polos con ceros en cualquier par de polinomios es de acuerdo a las cuatro combinaciones que aparecen abajo.

$$G_{LC}(s) = \frac{N_K(s)N(s)}{D_K(s)D(s) + N_K(s)N(s)}. \quad (11)$$

- a) $\{N_K(s), D_K(s)\}$
- b) $\{N_K(s), D(s)\}$
- c) $\{N(s), D_K(s)\}$
- d) $\{N(s), D(s)\}$

Las posibilidades “a” y “d” no tienen sentido ya que representarían a un controlador o una planta mal modelados.

Las únicas posibilidades son las que se presentan en “b” y “c”. Por otra parte la expresión de $K(s)G_P(s)$ es de acuerdo a (12)

$$K(s)G_P(s) = \frac{N_K(s)N(s)}{D_K(s)D(s)} \quad (12)$$

De la ecuación (12) se puede ver que las coincidencias de polos con ceros en “b” y “c” implican coincidencia de polos con ceros en $K(s)G_P(s)$

Suficiencia Supóngase que $K(s)G_P(s)$ presenta coincidencia de polos con ceros, entonces de acuerdo a la ecuación (12) se puede ver que las posibilidades de coincidencia de polos con ceros en cualquier par de polinomios son las mismas que en la prueba de necesidad. De igual manera las posibilidades “a” y “d” no tienen sentido ya que representarían a un controlador o una planta mal modelados. Las únicas posibilidades son las que se presentan en “b” y “c”. De acuerdo a la expresión de $G_{LC}(s)$ se puede ver que las coincidencias de polos con ceros en “b” y “c” implican coincidencia de polos con ceros en $G_{LC}(s)$. ■

En esta sección se puede concluir que cuando existe coincidencia de polos y ceros en $K(s)G_P(s)$ también existe coincidencia de polos y ceros en $G_{LC}(s)$.

En un sistema con retroalimentación de salida se puede perder controlabilidad u observabilidad cuando existe coincidencia de polos y ceros en la función de transferencia del sistema de lazo cerrado aunque el controlador establezca al sistema.

El sistema mostrado en la figura (1) es invariante a la controlabilidad y observabilidad al utilizar un control proporcional, sin embargo el sistema puede resultar no controlable o no observable al utilizar un controlador dinámico.

III. EJEMPLO 1

A continuación se muestra un sistema en la figura (2) obtenido de (Chi-Tsong Chen, 1999), el cual consta de dos resortes, dos amortiguadores y una placa. Se considera la salida del sistema como el promedio de los desplazamientos $(x_1+x_2)/2$, donde cada uno de ellos es tomado con respecto de la posición del resorte sin deformación. La función de transferencia del sistema $G_P(s)$ es:

$$G_P(s) = \frac{0.25((k_1+k_2) + (c_1+c_2)s)}{k_1k_2 + (c_1k_2 + c_2k_1)s + c_1c_2s^2} \quad (13)$$

Es fácil demostrar que el sistema es controlable si se satisface la ecuación: $k_1/c_1 \neq k_2/c_2$.

Al obtener el modelo del sistema en la ecuación (13) y tomando en cuenta la ecuación anterior existe coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia del sistema $G_P(s)$ cuando $k_1c_2 = k_2c_1$.

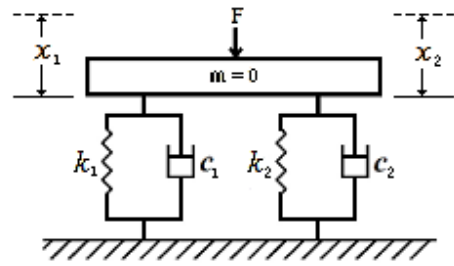


Figura 2. Sistema de lazo abierto.

Al realizar matemáticamente la cancelación de los factores comunes en la función de transferencia $G_P(s)$, físicamente cambia la dinámica del sistema obteniéndose ahora el modelo de un sistema físico diferente mostrado en la ecuación (14), es decir el sistema con dos resortes y dos amortiguadores matemáticamente cambiaría a representar el modelo de un sistema físico con un solo resorte y un amortiguador en el centro de la placa como se muestra en la figura (3), por ésta razón cuando el modelo de un sistema en lazo abierto presenta coincidencia de polos y ceros en su función de transferencia se debe evitar realizar cancelaciones ya que se representaría a un modelo que es matemáticamente equivalente pero que físicamente representa a un sistema diferente.

$$G_P(s) = \frac{0.25 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)}{s + \frac{k_1}{c_1}} \quad (14)$$

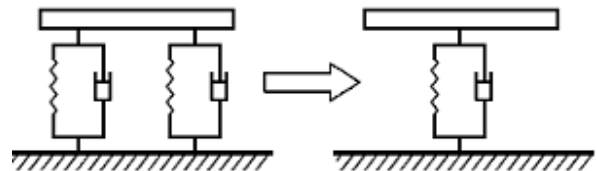


Figura 3. Sistemas matemáticamente equivalentes.

Al cancelar matemáticamente los factores comunes en la función de transferencia se dice que el sistema se encuentra en su realización mínima y por lo tanto el modelo reducido es controlable y observable.

Considerando que el sistema $G_P(s)$ no tiene coincidencia de polos con ceros en su función de transferencia con lo cual es controlable y observable. Por otra parte con un controlador $K(s)$ se pretende dar al sistema de lazo cerrado estabilidad además de ciertas características de desempeño, pero en algunos casos se logra el objetivo provocando una pérdida de controlabilidad u observabilidad no deseados.

En la figura (1) se muestra el diagrama de bloques para el sistema de lazo cerrado, donde $G_P(s)$ mostrado en la ecuación (13) corresponde a la función de transferencia del sistema de la figura (2), usando un controlador dinámico se puede observar que algunos de los ceros del controlador pueden ser idénticos a algunos de los polos del sistema o viceversa, de tal forma que matemáticamente puede existir cancelación de polos con ceros.

La función de transferencia en lazo cerrado se muestra a continuación:

$$G_{LC}(s) = \frac{K(s)G_P(s)}{1 + K(s)G_P(s)}, \quad (15)$$

Se propone realizar el análisis con el siguiente controlador:

$$K(s) = \frac{s+a}{s+b}, \quad (16)$$

y por lo tanto, $G_{LC}(s) = \frac{N_{LC}(s)}{D_{LC}(s)}$, (17)

$$N_{LC}(s) = \left(\frac{0.25(s+a)}{c_1c_2} \right) \left(s + \frac{k_1+k_2}{c_1+c_2} \right),$$

$$D_{LC}(s) = \left(\frac{s+b}{c_1+c_2} \right) \left(s + \frac{k_1}{c_1} \right) \left(s + \frac{k_2}{c_2} \right) + \left(\frac{0.25(s+a)}{c_1c_2} \right) \left(s + \frac{k_1+k_2}{c_1+c_2} \right).$$

De la ecuación (17) se puede observar que cuando los parámetros a y b del controlador son los valores $a = k_1/c_1$, $a = k_2/c_2$, $b = (k_1 + k_2)/(c_1 + c_2)$, puede existir una posible cancelación matemática al existir coincidencia de polos con ceros y el sistema puede ser no controlable o no observable en lazo cerrado, en cambio si se cancelan polos con ceros el sistema se encuentra en su realización mínima y puede ser controlable y observable, matemáticamente se elimina la dinámica del sistema no deseada, sin embargo el nuevo modelo no corresponde con la descripción física del sistema, como se observa en la figura (3) donde el sistema físico es de dos resortes y dos amortiguadores y el nuevo modelo corresponde a un sistema de un sólo resorte y un sólo amortiguador.

IV. RETROALIMENTACIÓN DE ESTADO

La retroalimentación de estado es una técnica que puede ser utilizada para tener alguna configuración deseada de los polos. Es conocido que la retroalimentación de estado puede reubicar la posición de los polos sin afectar a la controlabilidad del sistema.

Teorema 1: (Chi-Tsong Chen, 1999) *El par $(A - BK, B)$ para algún vector real constante K de dimensión $1 \times n$, es controlable si y sólo si (A, B) es controlable.*

Si el sistema de lazo abierto no es controlable entonces el sistema con retroalimentación de estado tampoco puede ser controlable, la controlabilidad es invariante a la retroalimentación de estado sin embargo no sucede lo mismo con la observabilidad ya que el sistema de lazo abierto puede ser observable y el sistema retroalimentado de estado puede resultar ser no observable, lo anterior se muestra a continuación. Un sistema en el espacio de estados se representa de la siguiente manera:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad (18)$$

se aplica retroalimentación de estados mediante: $u = r - kx$, resultando el sistema retroalimentado mostrado en la siguiente ecuación:

$$\dot{x}_f = A_f x + Br, \quad y_f = C_f x + Dr, \quad (19)$$

donde $A_f = A - BK$, $C_f = C - DK$.

Para llegar a analizar un ejemplo de pérdida de observabilidad se propone estudiar un sistema de segundo orden representado en el espacio de estados mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u, \quad y = [c_1 \quad c_2] x, \quad (20)$$

de tal forma que se puede hacer retroalimentación de estados mediante: $u = r - [k_1 \quad k_2] x$, resultando el sistema retroalimentado mostrado en la siguiente ecuación:

$$\dot{x}_f = \begin{bmatrix} a_{11} - b_1k_1 & a_{12} - b_1k_2 \\ a_{21} - b_2k_1 & a_{22} - b_2k_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} r, \quad (21)$$

$$y_f = [c_1 \quad c_2] x.$$

Ahora se revisa la controlabilidad y observabilidad del sistema de lazo abierto y del sistema retroalimentado de estado mostrados en las ecuaciones (20) y (21) respectivamente. El sistema de lazo abierto mostrado en la ecuación (20) es controlable si la matriz de controlabilidad en la ecuación (22) es de rango completo

$$U = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} b_1 & b_1a_{11} + b_2a_{12} \\ b_2 & b_1a_{21} + b_2a_{22} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

La matriz de la ecuación (22) es de rango completo si $\det(U) \neq 0$ entonces,

$$\det(U) = b_1^2a_{21} - b_2^2a_{12} - b_1b_2a_{11} + b_1b_2a_{22} \neq 0. \quad (23)$$

El sistema retroalimentado mostrado en la ecuación (21) es controlable si la matriz de controlabilidad en la ecuación (24) es de rango completo

$$U_f = [B \quad A_f B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_1(a_{11} - b_1k_1) + b_2(a_{12} - b_1k_2) \\ b_2 & b_1(a_{21} - b_2k_1) + b_2(a_{22} - b_2k_2) \end{bmatrix} \quad (24)$$

La matriz de la ecuación (24) es de rango completo si $\det(U_f) \neq 0$ entonces,

$$\det(U_f) = b_1^2a_{21} - b_2^2a_{12} - b_1b_2a_{11} + b_1b_2a_{22} \neq 0, \quad (25)$$

como se puede observar de las ecuaciones (23) y (25) la controlabilidad no depende de k y por lo tanto el sistema retroalimentado de estado es controlable si el sistema de lazo abierto también es controlable ya que $\det(U) = \det(U_f)$. Ahora se analiza la observabilidad de ambos sistemas. El sistema en lazo abierto mostrado en la ecuación (20) es observable si la matriz de observabilidad en la ecuación (26) es de rango completo,

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1a_{11} + c_2a_{21} & c_1a_{12} + c_2a_{22} \end{bmatrix} \quad (26)$$

La matriz de la ecuación (26) es de rango completo si $\det(V) \neq 0$ entonces,

$$\det(V) = c_1^2 a_{12} - c_2^2 a_{21} - c_1 c_2 a_{11} + c_1 c_2 a_{22} \neq 0. \quad (27)$$

El sistema retroalimentado de estado mostrado en la ecuación (21) es observable si la matriz de observabilidad en la ecuación (28) es de rango completo,

$$V_f = \begin{bmatrix} C \\ CA_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ V_{f21} & V_{f22} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$V_{f21} = c_1 (a_{11} - b_1 k_1) + c_2 (a_{21} - b_2 k_1),$$

$$V_{f22} = c_1 (a_{12} - b_1 k_2) + c_2 (a_{22} - b_2 k_2).$$

La matriz de la ecuación (28) es de rango completo si $\det(V_f) \neq 0$ entonces,

$$\det(V_f) = c_1^2 a_{12} - c_2^2 a_{21} - b_1 c_1^2 k_2 + b_2 c_2^2 k_1 - c_1 c_2 a_{11} + c_1 c_2 a_{22} + b_1 c_1 c_2 k_1 - b_2 c_1 c_2 k_2 \quad (29)$$

a partir de las ecuaciones (27) y (29) se puede observar que el $\det(V_f)$ también se puede expresar como sigue:

$$\det(V_f) = \det(V) - b_1 c_1^2 k_2 + b_2 c_2^2 k_1 + b_1 c_1 c_2 k_1 - b_2 c_1 c_2 k_2,$$

de la ecuación anterior se puede observar que existen valores de k que pueden hacer que el sistema en retroalimentación de estado sea no observable, es decir que el $\det(V_f) = 0$ aunque el sistema de lazo abierto sea observable $\det(V) \neq 0$, entonces el sistema retroalimentado puede resultar no observable si se cumple la siguiente relación: $b_1 c_1^2 k_2 - b_2 c_2^2 k_1 - b_1 c_1 c_2 k_1 + b_2 c_1 c_2 k_2 = \det(V)$.

V. EJEMPLO 2

Ahora se muestra un ejemplo en el que un sistema de segundo orden es controlable y observable en lazo abierto y al aplicar retroalimentación de estado resulta controlable y no observable. El sistema se define como en (30)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 2] x. \quad (30)$$

La función de transferencia del sistema en lazo abierto es:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \frac{3s + 7}{s^2 + 3s + 1}. \quad (31)$$

El sistema $G(s)$ es controlable ya que en la ecuación (32) el $\det(U) \neq 0$.

$$\det(U) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1. \quad (32)$$

El sistema $G(s)$ es observable ya que en la ecuación (33) el $\det(V) \neq 0$.

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5. \quad (33)$$

Al aplicar retroalimentación de estado al sistema de la ecuación (30) para un valor de $k = [1 \quad \frac{1}{3}]$ resulta el siguiente sistema:

$$\dot{x}_f = \begin{bmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y_f = [1 \quad 2] x. \quad (34)$$

La función de transferencia del sistema con retroalimentación en la ecuación (34) es:

$$G_f(s) = C_f(sI - A_f)^{-1} B_f = \frac{3s + 7}{(s + 2)(s + \frac{7}{3})}. \quad (35)$$

Como se puede observar en la ecuación (35) existe coincidencia de polos y ceros en su función de transferencia y por lo tanto el sistema con retroalimentación de estado resulta controlable y no observable como se muestra en las ecuaciones (36) y (37) respectivamente.

El sistema $G_f(s)$ es controlable ya que en la ecuación (36) el $\det(U_f) \neq 0$.

$$\det(U_f) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix} = -1. \quad (36)$$

El sistema $G_f(s)$ es no observable ya que en la ecuación (37) el $\det(V_f) = 0$.

$$\det(V_f) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0. \quad (37)$$

La retroalimentación de estado puede provocar que el sistema pierda observabilidad, esto sucede debido a que los polos del sistema pueden ser movidos a la misma posición de algún cero con lo cual existe coincidencia de polos y ceros en su función de transferencia.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó la relación que existe entre la función de transferencia de un sistema con respecto a sus propiedades de controlabilidad y observabilidad, para lo cual se analizaron sistemas con retroalimentación de salida y con retroalimentación de estado.

Se analizaron dos casos para un sistema con retroalimentación de salida unitaria, el primero cuando el controlador es proporcional y el segundo cuando el controlador es dinámico.

Al utilizar un control proporcional, el sistema de lazo cerrado es invariante a la controlabilidad y a la observabilidad, y al utilizar un control dinámico, el sistema de lazo cerrado puede resultar no controlable o no observable cuando existe coincidencia de polos con ceros en la función de transferencia de lazo abierto $K(s)G_P(s)$.

Se presentaron dos lemas relacionados con la cancelación de polos con ceros en la función de transferencia de un sistema.

Finalmente en el análisis de espacio de estados se presentó un ejemplo donde se muestra que la retroalimentación de estado es invariante a la controlabilidad pero puede perder observabilidad.

REFERENCIAS

- Brian D. O. Anderson y Michael R. Gevers (1981) *On Multivariable Pole-Zero Cancellations and the Stability of Feedback Systems*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, VOL. CAS-28, NO. 8.
- Butman, S. y Sivan, R. (1964). *On Cancellations, Controllability and Observability*. IEEE Transactions on Automatic Control, California Institute of Technology, Pasadena, CA, USA.
- Chi-Tsong Chen (1999). *Linear System Theory and Design*. Third Edition, Oxford University Press.

- E. Emre (1982). *Pole-Zero Cancellations in Dynamic Feedback Systems*. 21st IEEE Conference on Decision and Control, Department of Electrical Engineering, Texas Tech University, Lubbock, Texas 79409.
- Robert N. Clark (1988). *Another Reason to Eschew Pole-Zero Cancellation*. IEEE Control Systems Magazine, Dept. of Electr. Eng., Washington Univ., Seattle, WA, USA.
- S. Atadan (1991). *Pole-Zero Cancellation and State/Output Equations*. Proceedings of the 33rd Midwest Symposium on Circuits and Systems, Department of Mechanical Engineering, British Columbia University, Vancouver, BC.
- Stefan F. Graebe y Richard H. Middleton (1995). *Stable Open Loop Poles: To Cancel or not to Cancel?*. Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA.
- Stephen Kahne (1990). *Pole-Zero Cancellations in SISO Linear Feedback Systems*. IEEE Transactions on Education, Vol. 33, NO. 3. Dept. of Appl. Phys. and Electr. Eng., Oregon Grad. Center, Beaverton, OR.